Departamento de Matemática Aplicada a las TIC Curso 15-16
ETSIInf, UPM **Matemática Discreta I (MI)**
Control 1 **22-10-15**

Alumno
Apellidos…………………………………………… **Nombre**……………………..

Tiempo total para la prueba: 120 minutos

Antes de empezar a responder lee atentamente todos los enunciados. Cuando termines tu respuesta a un ejercicio vuelve a leer el enunciado y comprueba que has respondido a lo que se pregunta.

1. **(1 punto)**
En $A = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se considera la relación S definida por: (a,b) S (c,d) si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
Se pide:
(a) Comprueba que es de equivalencia.
(b) Halla la clase de (1,3) y la clase de (2,0)
(c) Describe el conjunto cociente A/S en términos geométricos.

SOL.:

(a) Se debe comprobar que la relación S cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva

Reflexiva: (a,b) S (a,b) para todo par (a,b)
Se cumple porque $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$
Simétrica: Si (a,b) S (c,d) entonces (c,d) S (a,b)
Si (a,b) S (c,d) entonces $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, pero esto implica que (c,d) S (a,b)
Transitiva: Si (a,b) S (c,d) y (c,d) S (e,f) entonces (a,b) S (e,f)
La primera condición indica que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ y la segunda que $c^2 + d^2 = e^2 + f^2$, luego $a^2 + b^2 = e^2 + f^2$ es decir, (a,b) S (e,f)

(b) Clase de (1,3)
$[(1,3)] = \{(x,y)\in A \ / \ (x,y)\ S\ (1,3)\} = \{(x,y)\in A \ / \ x^2 + y^2 = 10\}$
La clase de (1,3) está formada por los puntos de la circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt{10}$

Clase de (2,0)
$[(2,0)] = \{(x,y)\in A \ / \ (x,y)\ S\ (2,0)\} = \{(x,y)\in A \ / \ x^2 + y^2 = 4\}$
La clase de (2,0) está formada por los puntos de la circunferencia de centro (0,0) y radio 2

(c) Conjunto cociente A/S
Describamos la clase de un elemento (a,b) de A
$[(a,b)] = \{(x,y)\in A \ / \ (x,y)\ S\ (a,b)\} = \{(x,y)\in A \ / \ x^2 + y^2 = a^2 + b^2\}$
La clase de (a,b) está formada por los puntos de la circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt{a^2 + b^2}$
Así el conjunto cociente A/S es el conjunto de las circunferencias con centro en (0,0).

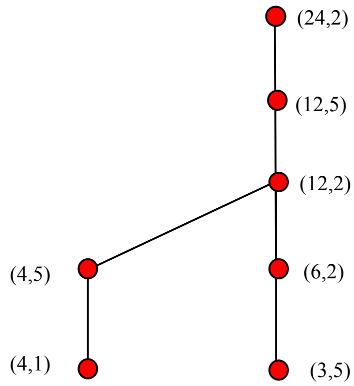
2. **(2 puntos)**

Se considera el conjunto $(D_{48}, |) \times (D_{10}, \leq)$ ordenado con el orden lexicográfico y con el orden producto. Dado el subconjunto A = {(3,5), (4,1), (4,5), (6,2), (12,2), (12,5), (24,2)}, halla, si existen, los elementos maximales y minimales, cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo del subconjunto A, tanto para el orden lexicográfico como para el orden producto. Sugerencia: Dibuja los diagramas de Hasse de A respecto de ambos órdenes.

SOL.:

Trabajamos independientemente los dos órdenes que se piden en el enunciado.

Orden lexicográfico en A

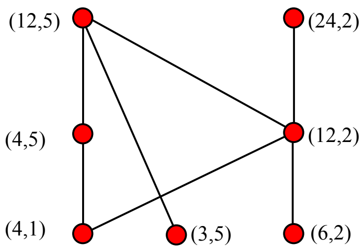


Primero dibujamos el diagrama de Hasse de (A, Lex)

Empecemos buscando minimales y maximales, que SÓLO debemos buscar dentro de A.
Elemento maximal: (24,2) porque no hay ningún elemento de A posterior a él. Como hay solo un maximal, es el máximo
Elementos minimales: {(4,1), (3,5)}, porque no hay ningún elemento de A anterior lexicográficamente a ninguno de ellos
Como hay más de un minimal NO existe mínimo.

Ahora buscamos cotas superiores e inferiores de A. Hay que mirar en todo $(D_{36}, |) \times (D_{10}, \leq)$
Cotas superiores de A: $\{(24,2), (24,5), (24,10)\} \cup \{(48,k) / k \in D_{10}\}$
Como (24,2) es anterior al resto de cotas, será el supremo de A. Además cuando existe máximo es también el supremo.
Cotas inferiores de A: $\{(1,k) / k \in D_{10}\}$
Ínfimo de A es (1,10) porque es la mayor, en el orden lexicográfico, de las cotas inferiores

Orden producto en A



Primero dibujamos el diagrama de Hasse de (A, Prod)

Empecemos buscando minimales y maximales, que SÓLO debemos buscar dentro de A.
Elementos maximales: (12,5) y (24,2) porque no hay ningún elemento de A posterior a ellos. Además estos elementos son incomparables en el orden producto

Como hay más de un maximal NO existe máximo
Elementos minimales: {(4,1), (3,5), (6,2)}, porque no hay ningún elemento de A anterior en el orden producto a ninguno de ellos
Como hay más de un minimal NO existe mínimo.

Ahora buscamos cotas superiores e inferiores de A. Hay que mirar en todo $(D_{48}, |) \times (D_{10}, \leq)$
Cotas superiores de A:
(a,b) será cota superior si a es múltiplo de 12 y 24 y b es mayor que 2 y 5. Luego las cotas superiores son {(24,5), (24,10), (48,5), (48,10)}
Como (24,5) es menor que las demás cotas, (24,5) es el supremo de A
Cotas inferiores de A:
(c,d) será cota inferior si c es divisor de 3, 4 y 6 y d es menor que 1, 2 y 5.
Luego solo hay una cota inferior (1,1) que es también el ínfimo

3. **(1 punto)**
Demuestra por inducción que $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ es múltiplo de 43 para todo $n \geq 0$

SOL.:
Primer paso. Comprobamos que el resultado es cierto para $n=0$
$6^2 + 7^1 = 36 + 7 = 43$, que efectivamente es un múltiplo de 43

Segundo paso. Suponiendo que el resultado es cierto para k, debemos probar que el resultado es cierto para $k + 1$

La hipótesis de inducción (HI) es que el resultado es cierto para k, es decir que
$6^{k+2} + 7^{2k+1}$ es múltiplo de 43.
Debemos probar que $6^{(k+1)+2} + 7^{2(k+1)+1}$ es múltiplo de 43. Operamos:

$$6^{(k+1)+2} + 7^{2(k+1)+1} = 6 \cdot 6^{k+2} + 7^2 \cdot 7^{2k+1} = 6\cdot\underbrace{(6^{k+2} + 7^{2k+1})}_{\boxed{\text{Múltiplo de 43 por HI}}} + \underbrace{43\cdot 7^{2k+1}}_{\boxed{\text{Múltiplo de 43}}}$$

Por tanto, cada sumando es múltiplo de 43 y la expresión es múltiplo de 43 para $k + 1$

Así hemos conseguido demostrar que si el resultado es cierto para k, también lo es para $k + 1$.
Por el principio de inducción el resultado es cierto para todo $n\geq0$

4. **(1 punto)**
(a) Demuestra que si n es un número impar con al menos dos divisores primos distintos entonces $\Phi(n)$ es múltiplo de 4.
(b) Halla los valores impares de n para los que $\Phi(n) \equiv 2 \pmod 4$

SOL.:
(a) Si n es impar y tiene dos divisores primos distintos, p y q, entonces en $\Phi(n)$ aparecerán los factores $p - 1$ y $q - 1$, que son pares, luego $\Phi(n)$ es múltiplo de 4.
(b) Si n es impar y $\Phi(n)$ no es múltiplo de 4, entonces n es una potencia de un primo, $n = p^k$
Así que $\Phi(p^k) = p^{k-1} (p - 1)$
Luego p debe ser un primo de la forma $4j + 3$, o sea, $p \equiv 3 \pmod 4$
La respuesta a la pregunta es: $n = p^k$ con p primo tal que $p \equiv 3 \pmod 4$

5. **(1 punto)**
Un grupo de amigos se gasta 120 euros comprando fruta y queso para una merienda campestre. Adquieren tarrinas de fruta a 2,20 euros la unidad y tablas de quesos a 8 euros la unidad. ¿Cuántas unidades de cada tipo han comprado?

SOL.:
Sean **x** el número de tablas de queso e **y** el número de tarrinas de fruta que compran. Indiquemos las relaciones entre las incógnitas que se deducen del enunciado.
$x > 0$, $y > 0$,
$8x + 2{,}20\, y = 120$

Multiplicamos esta expresión por 10 para conseguir una ecuación diofántica (coeficientes enteros)

$$80x + 22y = 1200$$

Resolvamos esta ecuación diofántica, que tiene solución porque $\text{mcd}(80,22) = 2$ que divide a 1200
Simplificamos por 2 (el mcd de los coeficientes)

$$40x + 11y = 600 \quad (*)$$

En primer lugar resolvemos la ecuación $40x + 11y = 1$

La solución es inmediata, $x = -3$, $y = 11$
Por tanto, una solución particular de (*) es $x = -1800$, $y = 6600$

Y todas las soluciones de (*) son:

$$\begin{cases} x = -1800 + 11t \\ y = 6600 - 40t \end{cases} \quad \forall t \in Z$$

Falta ahora imponer las restricciones sobre x e y indicadas por el enunciado del ejercicio para determinar el valor (o valores) de t que responden a la pregunta del enunciado.

$x = -1800 + 11t > 0$, luego $11t > 1800$, es decir, $t > 163{,}6$ o sea, $t \geq 164$
$y = 6600 - 40t > 0$, luego $40t < 11000$, es decir, $t < 165$

Para $t = 164$ tenemos $x = 4$, $y = 40$ solución válida
Para $t = 165$ tenemos $x = 15$, $y = 0$ que no es válida porque en el enunciado se dice que compran queso.

Por tanto, la compra ha sido de 4 tablas de queso y 40 tarrinas de fruta.

6. **(1,5 puntos)**
Enuncia y demuestra el teorema fundamental de la aritmética.

7. **(1 punto)**
Halla los inversos, si existen, de 59 y 66 en Z_{660}

SOL.: Recordemos que un elemento a es inversible en Z_m si y sólo si $\mathrm{mcd}(a,m) = 1$

Inverso de 33
Como 66 y 660 son pares resulta que $\mathrm{mcd}(66, 660) \neq 1$, por tanto 66 NO tiene inverso en Z_{660}

Inverso de 59
Como 59 es primo y no es divisor de 660 tenemos que $\mathrm{mcd}(59, 660) = 1$ y, por tanto, 59 SÍ tiene inverso en Z_{660}

Lo calculamos encontrando x, y tales que $59x + 660y = 1$ con el algoritmo de Euclides extendido.

$660 = 59 \cdot 11 + 11$
$59 = 11 \cdot 5 + 4$
$11 = 4 \cdot 2 + 3$
$4 = 3 \cdot 1 + 1$

Despejando 1 de abajo a arriba en las expresiones anteriores:
$1 = 4 - 3 = 4 - (11 - 4\cdot 2) = 4\cdot 3 - 11 =$
$= (59 - 11\cdot 5)\cdot 3 - 11 = 3\cdot 59 - 16\cdot 11 =$
$= 59 \cdot 3 - 16\cdot(660 - 59\cdot 11) = 59\cdot 179 - 16\cdot 660$

Por tanto, $179\cdot 59 + (-16)\cdot 660 = 1$

El inverso de 59 en Z_{660} es 179

8. **(1,5 puntos)**
Resuelve el sistema
$$\begin{cases} 514x \equiv 16 \pmod{40} \\ 40x \equiv 12 \pmod{38} \\ 64x \equiv 16 \pmod{45} \end{cases}$$

Simplifiquemos en primer lugar cada una de las ecuaciones:
$514x \equiv 16 \pmod{40}$ Como $514 = 40 \cdot 12 + 34$, $514 \equiv 34 \pmod{40} \equiv -6 \pmod{40}$

La primera ecuación es equivalente a $-6x \equiv 16 \pmod{40}$, es decir, $-6x \equiv -24 \pmod{40}$,

Y aplicando la propiedad cancelativa (factor 6) $x \equiv 4 \pmod{20}$

Ahora la segunda:

$40x \equiv 12 \pmod{38}$, $2x \equiv 12 \pmod{38}$ y, por la propiedad cancelativa, $x \equiv 6 \pmod{19}$

Finalmente la tercera ecuación: $64\,x \equiv 16 \pmod{45}$

Ahora empezamos por la propiedad cancelativa (factor 16), $4x \equiv 1 \pmod{45}$, multiplicamos por 11

$11 \cdot 4x \equiv 11 \pmod{45}$, es decir, $-x \equiv 11 \pmod{45}$, o sea, $x \equiv -11 \pmod{45}$

Por tanto el sistema a resolver es equivalente a:

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{20} \\ x \equiv 6 \pmod{19} \\ x \equiv -11 \pmod{45} \end{cases}$$

Los módulos NO son primos entre sí, así que no podemos asegurar que el sistema tenga solución. Intentemos resolverlo. Empezamos por la ecuación de módulo mayor

$x = -11 + 45t$ (*)

Sustituimos en la primera: $-11 + 45t \equiv 4 \pmod{20}$, de donde, $5t \equiv 15 \pmod{20}$, es decir, $t \equiv 3 \pmod{4}$, luego sustituyendo en (*), $x = -11 + 45(3 + 4j)$ (**)

Finalmente sustituimos este valor de x en la ecuación que resta (la segunda):

$-11 + 45(3 + 4j) \equiv 6 \pmod{19}$ operando $7(3 + 4j) \equiv 17 \pmod{19}$, $2 + 9j \equiv -2 \pmod{19}$,

$9j \equiv -4 \pmod{19}$, multiplicando por 2, $18j \equiv -j \equiv -8 \pmod{19}$, luego $j = 8 + 19k$

Sustituyendo en (**)

$x = -11 + 45(3 + 4j) = 124 + 180j = 124 + 180(8 + 19k) = 1564 + 3420k$, o bien

$$\boxed{x \equiv 1564 \pmod{3420}}$$